XII.

OLM cl. a XII-a

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ și G un grup finit cu n elemente. Să se arate că $n \in \{3,4\}$ dacă și numai dacă există $a, b \in G$ distincte astfel încât $G \setminus \{a,b\}$ este subgrup.

Cătălin Zîrnă

Dacă $G \setminus \{a,b\}$ este subgrup $\Rightarrow n-2 \mid n$ (2p)

$\frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2} \Rightarrow n-2 \mid 2 \Rightarrow n \in \{3,4\}$ (1p)

Dacă $n=3 \Rightarrow G = \{e, x_1, x_2\} \Rightarrow G \setminus \{x_1, x_2\}$ subgrup (1p)

Dacă $n=4 \Rightarrow G = \{e, x_1, x_2, x_3\}$

Cum $G \simeq K$ sau $\mathbb{Z}_4$ (1p) există un element de ordinul doi. Fie $x_1^2 = e$ (1p) $\Rightarrow G \setminus \{x_3, x_4\}$ subgrup (1p)

OLM cl. a XII-a

Fie $(G, \cdot)$ un grup și H un subgrup propriu. Pentru $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, se consideră $A = \{x \in G \mid x^p \in H\}$ și $B = \{x \in G \mid x^{p+1} \in H\}$

a) Să se arate că $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$

b) Să se arate că $(A \setminus B) \cap H = \emptyset$

Gabriela Constantinescu

a) ~~$A \neq \emptyset$~~

Sol:

a) $e \in A$, $e \in B$ (2p)

b) pp $\exists x \in (A \setminus B) \cap H \Rightarrow$

(2p) $\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x^p \in H \\ x \in H \end{cases}$ $\overset{H \text{ fiind subgrup}}{\Longrightarrow}$ (2p) $x^{p+1} = x^p \cdot x \in H$

$\Rightarrow$ (1p) $x \in B$ fals.

OLM Clasa a XII-a

Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Arătați că f admite primitive pe $[0,\infty)$

prof Dorin Arventiev

Soluție.

Fie $F(x)=\begin{cases}x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 3p

$F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\ln x}{x}=0 \quad \left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{l}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,\ \cos\tfrac{1}{x}\ \text{mărg}\right)$$ 1p

$\Rightarrow F$ deriv. în 0 și $F'(0)=0$, în rest, deriv.

$$F'(x)=\underbrace{\begin{cases}2x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}}_{\text{cont}\ \to\ \text{A.P}}+\underbrace{\begin{cases}x\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}}_{\text{cont}\ \to\ \text{AP}}+$$

A.P 1p 1p

$$+\underbrace{\begin{cases}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}}_{f(x)}\Rightarrow f\ \text{a.p pe}\ [0,\infty)$$

+ 1p final

OLM cl. a XII-a

4) Să se calculeze $\int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \ln \cos x\right)dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(GMB)

Soluție:

$\int e^x \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int e^x (\mathrm{tg}\,x)'\,dx =$

$= e^x\,\mathrm{tg}\,x - \int e^x \cdot \mathrm{tg}\,x\,dx$ (3p)

$\int e^x \ln\cos x\,dx = \int (e^x)' \ln\cos x\,dx =$

$= e^x \ln\cos x + \int e^x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$ (3p)

$\Rightarrow \int e^x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \ln\cos x\right)dx = e^x(\mathrm{tg}\,x + \ln\cos x) + \mathcal{C}$ (1p)